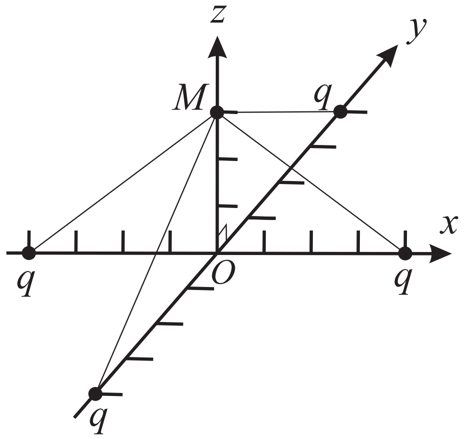
Examen Électromagnétisme - PEIP 2
18 janvier 2019
4 Exercices recto-verso / Durée de l'épreuve 2 heures.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes collège standards autorisées

$$\mu_0 = 4\pi.10^{-7}\ \text{H.m}^{-1} \quad , \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9\ \text{F.m}^{-1}.$$

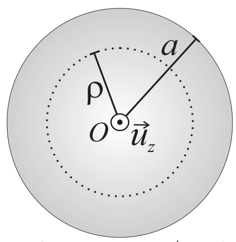
1. (7pts) **Electrostatique :** Considérons 4 charges identiques, q, situées sur les axes x et y à $\pm$4m.



   (a) Donner l'expression pour le potentiel électrique $V(z)$ le long de l'axe z.
   (b) Trouver le potentiel électrique à la position $V(z_M = 3\text{m})$ sur l'axe (A.N. $q = 10\mu$C)
   (c) Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}(M)$ à la position $M = (0, 0, 3)$m. A.N.
   (d) Quelle est l'énergie électrostatique, $\mathcal{E}$, des quatre charges, q, dans le plan xOy. A.N.
   (e) Quelle est la force sur une particule de charge $Q = -40\mu$C à la position $M = (0, 0, 3)$m. A.N.
   (f) Quelle quantité de travail, W, faut-il afin de déplacer la charge Q depuis l'origine jusqu'au point M. A.N.
   (g) Trouver le moment dipolaire du système de 5 charges (les 4 charges q ainsi qu'une charge Q au point M) A.N.

2. (5pts) **Magnétostatique et Théorème d'Ampère :**
   Considérons un fil conducteur de rayon a, d'étendue infinie portant une densité volumique de courant, $\vec{\boldsymbol{j}}$, donné en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) par :

$$\vec{\boldsymbol{j}}(\rho) = \begin{cases} j_0 \left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \vec{\boldsymbol{u}}_z & \rho \leq a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$



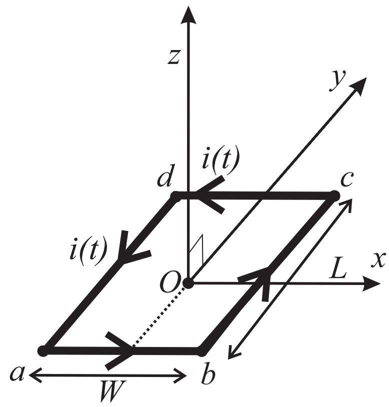
   où j_0 est une constante avec les dimensions de densité volumique de courant. (**Indice :** Dans un plan z=cte, l'on utilisera l'élément de surface en coordonnées cylindriques, $d\vec{\boldsymbol{S}} = \rho d\rho d\phi \vec{\boldsymbol{u}}_z$)

   (a) Déterminer l'intensité de courant, I, portée par le fil.
   (b) Spécifier les symétries du problème. Faire un schéma avec des lignes de champ $\vec{\boldsymbol{B}}$.
   (c) Exprimer en fonction de j_0, le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ à l'extérieur du fil (c.-à-d. $\rho > a$).
   (d) Exprimer en fonction de j_0, le champ $\vec{\boldsymbol{B}}$ à l'intérieur du fil. (c.-à-d. $\rho < a$)
   (e) Faites un schéma de $\|\vec{\boldsymbol{B}}\|$ en fonction de ρ.

3. (5pts) **Induction :**

Une spire conductrice de forme rectangulaire (de larguer W et de longueur L) est placée dans le plan z=0 (voir la figure). Elle est également immergée dans un champ magnétique, $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0 \vec{\boldsymbol{u}}_z$ On fait tourner le circuit autour de l'axe Oy avec une vitesse angulaire $\omega = 100\mathrm{s}^{-1}$ telle que la normale au cadre obéisse à l'équation :

$$\vec{\boldsymbol{n}}(t) = \vec{\boldsymbol{u}}_x \sin \omega t + \vec{\boldsymbol{u}}_z \cos \omega t$$



(a) Trouver l'expression pour le flux magnétique, $\Phi(t)$, à travers le circuit.

(b) Trouver l'expression de la force électromotrice, $e(t)$, dans la spire.

(c) Donner l'expression du courant induit, $i(t)$, dans la spire
(A.N. du courant maximal, i_0, avec $W = 10\mathrm{cm}$, $L = 30\mathrm{cm}$ $B_0 = 2\mathrm{T}$, $\omega = 100$ rad/s, et $R = 2\Omega$).

(d) Donner l'expression de la puissance dissipée, $P_J(t)$, dans la résistance, R, du circuit. (A.N. de la puissance dissipée maximale, P_0)

(e) Quelle est la puissance $P_{\mathrm{ext}}(t)$ qui doit être fournie par une force extérieure afin d'annuler la force de Laplace et garder une vitesse de rotation ω du circuit constante ?

4. (5pts) **Forces magnétiques :**

On considère la même spire que dans la question précédente, mais le champ magnétique extérieur (homogène) est maintenant $\vec{\boldsymbol{B}} = B_0 \left(\vec{\boldsymbol{u}}_z + \vec{\boldsymbol{u}}_x\right)$, et l'on considère également qu'un générateur de courant (non illustré) maintient un courant I (constante) dans le circuit.

(a) Donner l'expression pour le moment dipolaire magnétique, $\vec{\boldsymbol{m}}$, de la spire. (utiliser la formule du cours)

(b) Trouver les expressions de la force de Laplace sur les quatre bords de la spire, $\vec{\boldsymbol{F}}_{bc}$, $\vec{\boldsymbol{F}}_{da}$, $\vec{\boldsymbol{F}}_{ab}$, et $\vec{\boldsymbol{F}}_{cd}$.

(c) Quelle est la force de Laplace totale, $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{L,tot}}$, sur le circuit ?

(d) Quel est le couple des forces de Laplace autour de l'axe Oy, $\Gamma_y = \vec{\boldsymbol{\Gamma}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}_y$?
(en fonction de I, W, L et B_0)
Indice : On se rappelle que le couple de forces de Laplace sur le circuit est donné par :

$$\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \oint_{\mathrm{circuit}} \vec{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{L}} \wedge d\vec{\boldsymbol{OP}} \,,$$

mais le calcul est plus facile si nous nous souvenons de la formule du cours où pour un dipôle magnétique, $\vec{\boldsymbol{m}}$, dans un champ magnétique homogène, $\vec{\boldsymbol{B}}$, notamment : $\vec{\boldsymbol{\Gamma}} = \vec{\boldsymbol{m}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}$.
(A.N. $W = 10\mathrm{cm}$, $L = 30\mathrm{cm}$ et $I = 4\mathrm{A}$, $B_0 = 2\mathrm{T}$.)

Décrivez ce qui se passera si la boucle est laissée libre de se déplacer ou se mettre en rotation (c.-à-d. sans contraintes mécaniques).